## *Exercice 1 :* ............................................................ *5 points*

Pour tout nombre complexe $z$, on définit le polynôme :

$p(z) = z^3 + 2\left(-1+\sqrt{2}\right)z^2 + 4\left(1-\sqrt{2}\right)z - 8$

0,5 pt

1. Calculons $p(2)$.

$p(2) = 2^3 + 2\left(-1+\sqrt{2}\right)\times 2^2 + 4\left(1-\sqrt{2}\right)\times 2 - 8 = 8 - 8 + 8\sqrt{2} + 8 - 8\sqrt{2} - 8 = 0$

$p(2) = 0$.

2. Résolvons, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$.

2 est une racine de $p(z)$, factorisons $p(z)$.

**Méthode 1** : Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} z^3 + 2\left(-1+\sqrt{2}\right)z^2 + 4\left(1-\sqrt{2}\right)z - 8 & z-2 \\ \hline \underline{-z^3 + 2z^2} \qquad\qquad\qquad\qquad & z^2 + 2z\sqrt{2} + 4 \\ 2\sqrt{2}z^2 + 4\left(1-\sqrt{2}\right)z & \\ \underline{-2\sqrt{2}z^2 + 4z\sqrt{2}} & \\ 4z - 8 & \\ \underline{-4z + 8} & \\ 0 + 0 & \end{array}$$

$p(z) = (z-2)\left(z^2 + 2z\sqrt{2} + 4\right)$

**Méthode 2** :Tableau d'Hörner

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-2+2\sqrt{2}$ | $4-4\sqrt{2}$ | $-8$ |
| 2 | ↓ | 2 | $4\sqrt{2}$ | 8 |
| | 1 | $2\sqrt{2}$ | 4 | 0 |

$p(z) = (z-2)\left(z^2 + 2z\sqrt{2} + 4\right)$

**Méthode 3** : Les coefficients indéterminés

2 est une racine de $p(z) = z^3 + 2\left(-1+\sqrt{2}\right)z^2 + 4\left(1-\sqrt{2}\right)z - 8$, alors il existe $a$, $b \in \mathbb{C}$, tel que $p(z) = (z-2)\left(z^2 + az + b\right)$.

$p(z) = (z-2)\left(z^2 + az + b\right) = z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a - 2 = 2\left(-1+\sqrt{2}\right) \\ b - 2a = 4\left(1-\sqrt{2}\right) \\ -2b = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 4 \end{cases}$$

$p(z) = (z-2)\left(z^2 + 2z\sqrt{2} + 4\right)$

$p(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)\left(z^2 + 2z\sqrt{2} + 4\right) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 + 2z\sqrt{2} + 4 = 0$

$z^2 + 2z\sqrt{2} + 4 = 0$ ;  $\Delta = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4(4) = 8 - 16 = -8 = \left(2i\sqrt{2}\right)^2$

$z_1 = \dfrac{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ;  $z_2 = \dfrac{-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ ;

$\boldsymbol{S = \left\{2\ ;\ -\sqrt{2}+i\sqrt{2}\ ;-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\ \right\}}$ 0,75pt

On appelle $z_1$ et $z_2$ les solutions de l'équation, autres que la solution réelle, $z_1$ ayant la partie imaginaire positive.

Calculons $z_1+z_2$, puis déterminons le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_1$ et $z_2$ : $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ; $z_2=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

**Méthode 1 :**

$z_1+z_2=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

$|z_1|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$

$|z_2|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=2$

Soient $\theta_1=Arg(z_1)$ et $\theta_2=Arg(z_2)$, on a :

$$\begin{cases}\cos\theta_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex] \sin\theta_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta_1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\ \text{ et }\ \begin{cases}\cos\theta_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex] \sin\theta_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta_2=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

$\boldsymbol{z_1+z_2=-2\sqrt{2}}$ ; $|\boldsymbol{z_1}|=2$ ; $Arg(\boldsymbol{z_1})=\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$ ; $|\boldsymbol{z_2}|=2$ ; $Arg(\boldsymbol{z_2})=\boldsymbol{\frac{5\pi}{4}}$.

0,25pt 0,25 0,25 0,25 0,25

**Méthode 2 :**

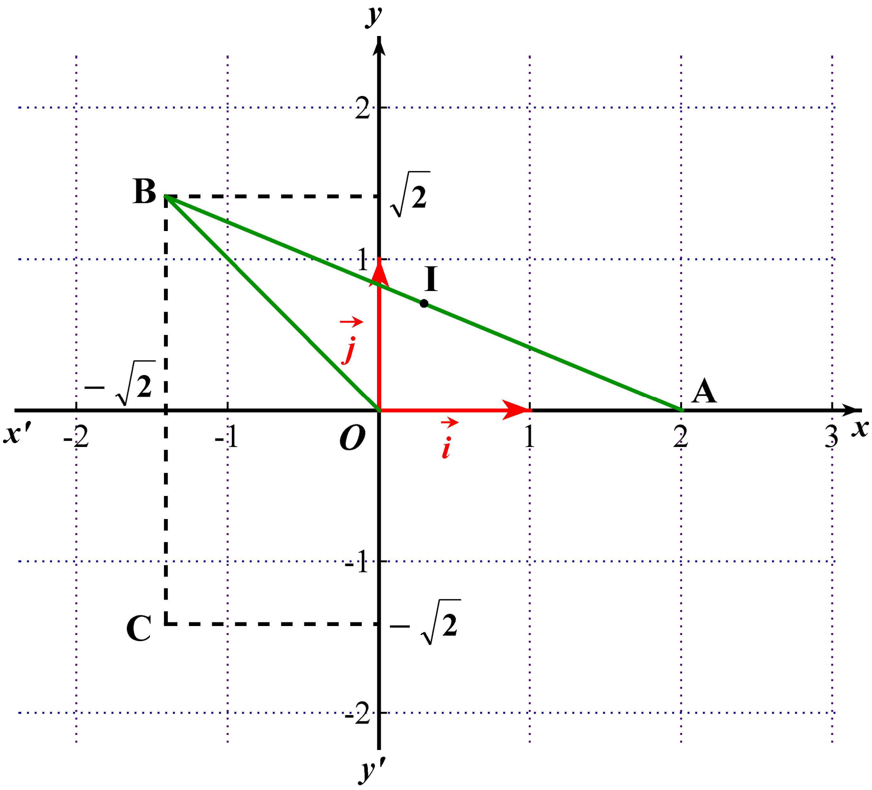
$z_1+z_2=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}=-2\sqrt{2}=2R_e(z_1)$ alors $z_2=\overline{z_1}$ par suit :

$|z_1|=|z_2|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$ et $Arg(z_2)=-Arg(z_1)$.

Soit $\theta=Arg(z_1)$, on a :

$$\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex] \sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=Arg(z_1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\ \text{alors}\ Arg(z_2)=-\frac{3\pi}{4}$$

Plaçons dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$,unité graphique : 2 cm, les points $A$ d'affixe 2, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$, $I$ le milieu de $[AB]$ :




b. Déterminons la nature du triangle OAB, puis calcule l'affixe $z_I$ de $I$ puis son module.

0,25×4 = 1pt

D'après la représentation graphique $OAB$ ressemble à un triangle isocèle en O. Vérifions cette conjecture par les calculs.

**Méthode 1 :**

$OA = |z_A - z_O| = |z_A| = |2| = 2$

$OB = |z_B - z_O| = |z_B| = |z_1| = 2$

$OA = OB = 2$, alors $OAB$ est un triangle isocèle en $O$. 0,5pt

**Méthode 2 :**

$$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{z_B}{z_A} = \frac{z_1}{2} = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$ , alors $OAB$ est un triangle isocèle en $O$.

l'affixe $z_I$ de $I$ puis son module.

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$ 0,25 pt

$$|z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$ 0,25 pt

c. Déduisons des résultats précédents les valeurs exactes de cos $\frac{3\pi}{8}$ et sin $\frac{3\pi}{8}$.

$OAB$ est un triangle isocèle en $O$ ; $mes\left(\widehat{BOA}\right) = \frac{3\pi}{4}$ rad et $I$ est le mileu de $[AB]$.

Par conséquent $Arg(z_I) = mes\left(\widehat{BOI}\right) = mes\left(\widehat{IOA}\right) = \dfrac{mes\left(\widehat{BOA}\right)}{2} = \dfrac{3\pi}{8}$ rad.

Donc $z_I = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = |z_I| e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$$|z_I| e^{i\frac{3\pi}{8}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow e^{i\frac{3\pi}{8}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2|z_I|} + i\frac{\sqrt{2}}{2|z_I|}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2|z_I|} + i\frac{\sqrt{2}}{2|z_I|}$$

Par identifiaction on a : $\cos\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2|z_I|}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2|z_I|}$

On sait que $|z_I| = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ on a donc :

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2|z_I|} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}^{\,2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2|z_I|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\mathbf{\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\ ;\ \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

0,5 pt

## Exercice 2 : .......................................................................................... 6 points

I. On pose pour tout $u \in (\mathbb{R} - \{-1, 1\})$, $f(u) = \dfrac{u}{(u^2-1)^2}$.

1. Déterminons une primitive $F$ de $f$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

$$f(u) = \frac{u}{(u^2-1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2u}{(u^2-1)^2} \Rightarrow F(u) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{u^2-1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F(u) = -\frac{1}{2(u^2-1)}}$$

1pt

2. On pose pour tout $u \in (\mathbb{R} - \{-1, 1\})$, $g(u) = \dfrac{1}{u(u^2-1)}$.

Déterminons les réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout $u \in (\mathbb{R} - \{-1, 1\})$, on ait

$$g(u) = \frac{a}{u} + \frac{b}{u-1} + \frac{c}{u+1}$$

$$g(u) = \frac{a}{u} + \frac{b}{u-1} + \frac{c}{u+1} = \frac{a(u-1)(u+1) + bu(u+1) + cu(u-1)}{u(u^2-1)}$$

$$= \frac{(a+b+c)u^2 + (b-c)u - a}{u(u^2-1)}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=0 \\ -a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=c=\dfrac{1}{2} \end{cases};$$

0,5pt

$$\boldsymbol{a=-1;\ b=\frac{1}{2}\ ;\ c=\frac{1}{2}\ ;\ g(u)=-\frac{1}{u}+\frac{\frac{1}{2}}{u-1}+\frac{\frac{1}{2}}{u+1}}$$

Déduisons une primitive G de g sur $]1,+\infty[$.

$$g(u)=-\frac{1}{u}+\frac{\frac{1}{2}}{u-1}+\frac{\frac{1}{2}}{u+1} \Rightarrow \mathbf{G(u)=-\ln u+\frac{1}{2}\ln(u-1)+\frac{1}{2}\ln(u+1)}$$

0,5pt

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculons, pour $x>1$, $J(x)=\int_2^x \frac{u\ln u}{(u^2-1)^2}du$.

Posons : $U'=\dfrac{u}{(u^2-1)^2} \Rightarrow U=-\dfrac{1}{2(u^2-1)}$

$V=\ln u \Rightarrow V'=\dfrac{1}{u}$

$$J(x)=\int_2^x \frac{u\ln u}{(u^2-1)^2}du=\left[-\frac{\ln u}{2(u^2-1)}\right]_2^x+\frac{1}{2}\int_2^x\frac{1}{u(u^2-1)}du$$

$$=\left[-\frac{\ln u}{2(u^2-1)}\right]_2^x+\frac{1}{2}\left[-\ln u+\frac{1}{2}\ln(u-1)+\frac{1}{2}\ln(u+1)\right]_2^x$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{\ln u}{(u^2-1)}-\ln u+\frac{1}{2}\ln(u^2-1)\right]_2^x=\left[-\frac{u^2\ln u}{2(u^2-1)}+\frac{1}{4}\ln(u^2-1)\right]_2^x$$

$$\boldsymbol{J(x)=-\frac{x^2\ln x}{2(x^2-1)}+\frac{1}{4}\ln(x^2-1)+\frac{2\ln 2}{3}-\frac{1}{4}\ln 3}$$

1pt

II. Un pêcheur capture 100 tonnes de poissons un premier mois. Ensuite, cette quantité diminue de 5 % chaque mois. Il cessera son activité à la fin du mois dès qu'il passe sous le seuil de rentabilité : 30 tonnes par mois.

Déterminons le nombre de tonnes de poissons qu'il aura pêchés au total

Soit $u_n$ le nombre de tonnes de poissons péchés au $n^{ième}$ mois

Il s'agit de calculer $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$, tel que $u_n<30$ pour la première fois.

On a : $u_1=100$ tonnes, $u_{n+1}=(1-5\%)u_n=0{,}95u_n$.

1pt

$(u_n)_{n\geq 1}$ est donc une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $u_1=100$.

Son terme général est : $u_n=u_1(0{,}95)^{n-1}=100(0{,}95)^{n-1}$ et la somme des termes est :

0,5pt

$S_n=u_1\dfrac{1-0{,}95^n}{1-0{,}95}$.

$u_n < 30 \Longrightarrow 100(0{,}95)^{n-1} < 30 \Longrightarrow (0{,}95)^{n-1} < \dfrac{30}{100} \Longrightarrow n > 1 + \dfrac{\ln 0{,}3}{\ln 0{,}95} \Longrightarrow n > 24,47.$

$n > 24,47$ et $n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow n = 25.$

$S_n = \sum_{k=1}^{25} u_k = 100\dfrac{1-0{,}95^{25}}{1-0{,}95} \approx 1\,445,22$ tonnes.

Il aura péché au total environ 1 445, 22 tonnes.

1pt

## Problème : ........................................................................................ 10 points ✍

A. Soit $f$ la fonction définie par : $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{x^3+5x^2+9x+5}{2x^2+2}$ et on note $(C)$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1. Démontrons qu'il existe trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx}{x^2+1}$.

**Méthode 1** : Division euclidienne

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +5x^2 & +9x & +5 & 2x^2+2 \\ \cline{5-5} -x^3 & & -x & & \frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \\ \cline{1-3} & 5x^2 & +8x & +5 & \\ & -5x^2 & & -5 & \\ \cline{2-4} & & 8x & & \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} + \dfrac{8x}{2x^2+2} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} + \dfrac{4x}{x^2+1}$ alors $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}\ ;\ b = \frac{5}{2}\ ;\ c = 4}$

1,5pt

**Méthode 2** : Les coefficients indéterminés :

$f(x) = ax + b + \dfrac{cx}{x^2+1} = \dfrac{(ax+b)(x^2+1)+cx}{x^2+1} = \dfrac{ax^3+bx^2+(a+c)x+b}{x^2+1}$

$= \dfrac{2ax^3+2bx^2+2(a+c)x+2b}{2x^2+2}$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 5 \\ 2a+2c = 9 \\ 2b = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{5}{2} \\ c = 4 \end{cases} ; \qquad \boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{4x}{x^2+1}}$$

2. a. Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+5x^2+9x+5}{2x^2+2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+5x^2+9x+5}{2x^2+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}\right) = +\infty$$

0,5pt

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

b. Déterminons l'équation de la droite $(D)$, asymptote oblique à $(C)$.

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}+\frac{4x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)=\frac{4x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)=0$$

0,5pt

Donc $(D)$: $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ est asymptote oblique à $(C)$.

**Autre méthode**

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\frac{x^3+5x^2+9x+5}{2x^2+2}\right)=\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2}\right)=\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\frac{x}{2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^3+5x^2+9x+5}{2x^2+2}\right)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2}\right)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)=+\infty$$

Donc il y a possibilité d'asymptote oblique

$$\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(\frac{x^3+5x^2+9x+5}{2x^3+2x}\right)=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x^3}\right)=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ ;\ a=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\mapsto\pm\infty} f(x)-ax=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(\frac{x^3+5x^2+9x+5}{2x^2+2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(\frac{x^3+5x^2+9x+5-x^3-x}{2x^2+2}\right)$$

$$=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(\frac{5x^2+8x+5}{2x^2+2}\right)=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(\frac{5x^2}{2x^2}\right)=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\ ;\ b=\frac{5}{2}$$

D'où la droite $(D)$ : $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ est asymptote oblique à la courbe $(C)$ de $f$.

c. Étudions la position relative de $(C)$ par rapport à $(D)$.

Pour cela, étudions le signe de $f(x)-y=\frac{4x}{x^2+1}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{4}{x^2+1}>0$ ; le signe de $f(x)-y$ dépend de celui de $x$.

Par conséquent :

$\forall x\in]-\infty, 0[$ $f(x)-y<0$, $(C)$ est en dessous de $(D)$ ;

$\forall x\in]0, +\infty[$ $f(x)-y>0$, $(C)$ est au dessus de $(D)$ ;

0,5pt

Pour $x=0$, $f(x)=y=\frac{5}{2}$, $(C)$ et $(D)$ se coupent au point $\left(0\ ;\ \frac{5}{2}\right)$.

3. Étudions les variations de $f$ sur son domaine de définition.

$$f(x)=\frac{x^3+5x^2+9x+5}{2x^2+2}$$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+10x+9)(2x^2+2)-4x(x^3+5x^2+9x+5)}{(2x^2+2)^2}$$

$$=\frac{6x^4+20x^3+18x^2+6x^2+20x+18-4x^4-20x^3-36x^2-20x}{(2x^2+2)^2}$$

$$=\frac{6x^4+18x^2+6x^2+18-4x^4-36x^2}{(2x^2+2)^2}=\frac{2x^4-12x^2+18}{(2x^2+2)^2}=\frac{2(x^2-3)^2}{(2x^2+2)^2}.$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\geq 0$, alors $f$ est croissante.

**Tableau de variation :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | 0 | | + | | 0 | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | | 0 | $\nearrow$ | | | $+\infty$ |

1pt

4. a. Déterminons les coordonnées des points de la courbe $(C)$ où la tangente est parallèle à la droite $(D)$.

Soit $(T) : y = f'(x_0)\left(x - x_0\right) + f(x_0)$, l'équation de la droite tangente à ,$(C)$ en un point $x_0$.

$(T) /\!/ (D) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2-3\right)^2}{\left(2x^2+2\right)^2} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 9 = x^4 + 2x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$f(1) = \frac{(1)^3 + 5(1)^2 + 9(1) + 5}{2(1)^2 + 2} = \frac{20}{4} = 5$

$f(-1) = \frac{(-1)^3 + 5(-1)^2 + 9(-1) + 5}{2(-1)^2 + 2} = 0$

$(T) /\!/ (D)$ **aux points de coordonnées :** $(1; 5)$ **et** $(-1; 0)$

Déterminons les équations des tangentes à $(C)$ en ces points.

$(T) : y = f'(x_0)\left(x - x_0\right) + f(x_0)$

$(T_1) : y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) + 5 = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

0,75pt

$(T_2) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = \frac{1}{2}(x+1)$

$$\boldsymbol{(T_1) : y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}\ ;\ (T_2) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

b. Démontrons que $I\left(0, \frac{5}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $(C)$.

$I(a, b)$ est un centre de symétrie de $(C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in Df \\ 2a - x \in Df \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}\ ;\ \forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$

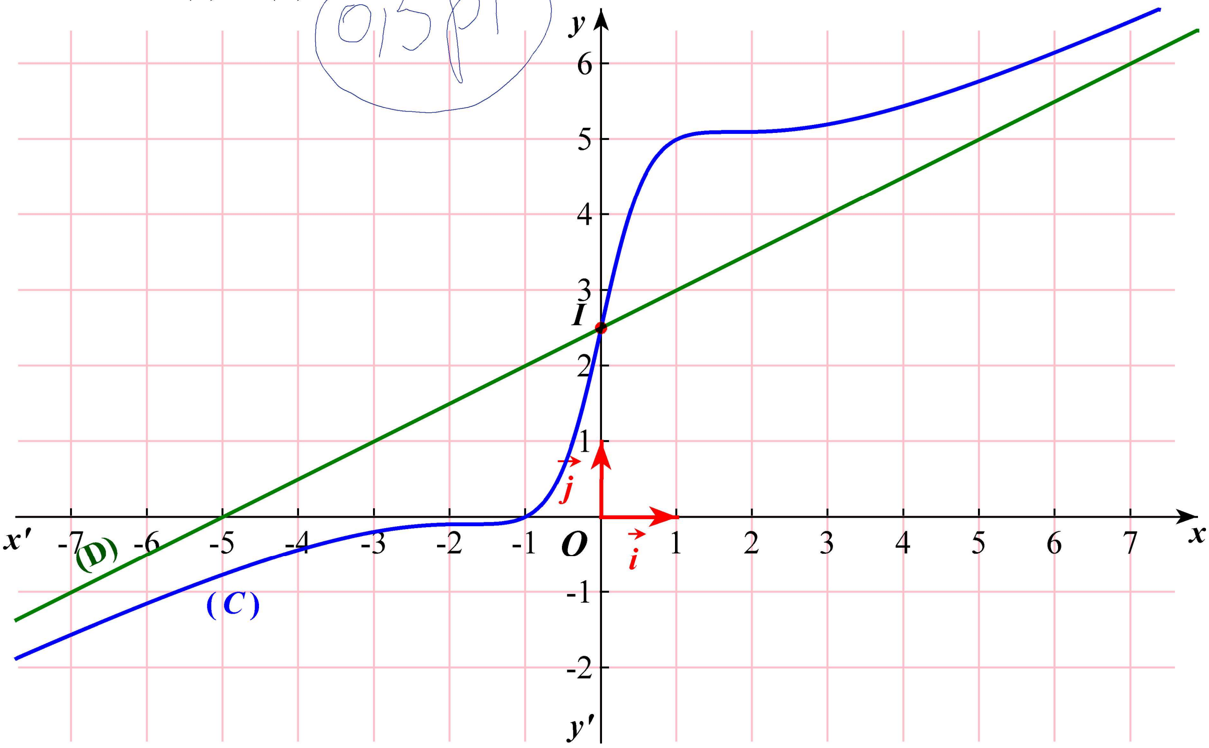
Vérifions si $f(x) + f(-x) = 5$. Si c'est le cas on pourra conclure que $I\left(0\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ est bien un centre de symétrie de $(C)$.

$$f(x) + f(-x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{8x}{2x^2+2}\right) + \left(\frac{1}{2}(-x) + \frac{5}{2} + \frac{8(-x)}{2(-x)^2+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{8x}{2x^2+2} - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - \frac{8x}{2x^2+2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$$

Donc $I\left(0\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ est bien un centre de symétrie de $(C)$. 0,5p

5. Traçons $(C)$ et $(D)$ 0,5pt




B. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g$: $x \longmapsto g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x + 2\ln(x^2+1)$.

1. Démontrons que la fonction g est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ qui s'annule en zéro.

$g$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ qui s'annule en zéro $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} g'(x) = f(x) \\ g(0) = 0 \end{cases}$

$g'(x) = \frac{2x}{4} + \frac{5}{2} + 2\frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} + \frac{4x}{x^2+1} = f(x)$ 0,5pt

$g(0) = 0 + 0 + 2\ln 1 = 0$

Par conséquent g est bien une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ qui s'annule en zéro

2. a. Étudions le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

D'après les variations de $f$,

$\forall x \in ]-\infty, -1[\ f(x) < 0, \Longrightarrow g'(x) < 0$, alors g est strictement décroissante. 1pt

$\forall x \in ]-1, +\infty[\ f(x) > 0, \Longrightarrow g'(x) > 0$, alors g est strictement croissante.

Pour $x = -1$, $f(-1) = 0 \Longrightarrow g'(-1) = 0$, alors g est constante.

b. Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x + 2\ln(x^2+1)\right) = +\infty$$

0,5pt

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x + 2\ln(x^2+1)\right) = +\infty$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$

a. Calculons en fonction de $\alpha$, l'aire $A(\alpha)$, en cm$^2$ de l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \leq y \leq f(x) \end{cases}$

$$A(\alpha) = \int_0^{\alpha}\left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)\right)dx = \int_0^{\alpha}\left(\frac{8x}{2x^2+2}\right)dx = \int_0^{\alpha}\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \left[2\ln(x^2+1)\right]_0^{\alpha} = 2\ln(\alpha^2+1)$$

0,75pt

$\boldsymbol{A(\alpha) = 2\ln(\alpha^2+1)}$ (en cm$^2$)

b. Déterminons les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles on a : $A(\alpha) \leq 1$

$$A(\alpha) \leq 1 \Rightarrow 2\ln(\alpha^2+1) \leq 1 \Rightarrow \alpha^2 + 1 \leq e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 \leq e^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\Rightarrow |\alpha| \leq \sqrt{e^{\frac{1}{2}} - 1} \Rightarrow -\sqrt{e^{\frac{1}{2}} - 1} \leq \alpha \leq \sqrt{e^{\frac{1}{2}} - 1}$$

$\boldsymbol{A(\alpha) \leq 1}$ **lorsque** $\boldsymbol{0 \leq \alpha \leq \sqrt{e^{\frac{1}{2}} - 1}}$ **car** $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}_+}$ 0,5pt